数理解析研究所講究録
第 1576 巻 2008 年 154-168

Black Hole Sasaki-Einstein Manifold and AdS/CFT Correspondence

大阪市立大学大学院理学研究科

安井幸則

1. はじめに

任意次元の空間で Einstein 方程式

$$Ric(g) = \Lambda g \tag{1}$$

を満足する角運動量と NUT 電荷を持つブラックホール解が Chen-Lü-Pope によって発見された [CLP]. この解は, Kerr-NUT-de Sitter 計量と呼ばれ, 現在知られている最も一般的なブラックホール解である. 幾何学的には, 2 階のコンフォーマルな Killing-Yano テンソル場が存在する空間として特徴づけることができる [HOY1][HOY2]. また, この計量から"BPS"極限を取ることにより, 偶数次元では Calabi-Yau 計量を [OY1][LP], 奇数次元では Sasaki-Einstein 計量を誘導することができる [HSY1,2][CLPP1,2]. 近年, これらの幾何学はゲージ理論の解析に対しても有効であることがわかってきた. 実際, 超弦理論にはゲージ理論と重力理論の等価性を主張する AdS/CFT 対応と呼ばれる予想がある. この対応関係を使うと, 重力理論サイドの 5 次元 Sasaki-Einstein 計量から 4 次元超対称ゲージ理論の強結合領域を調べることが可能となる. 本稿の内容は, Kerr-NUT-de Sitter 計量の一意性について, そして BPS 極限で現れる幾何学について宝利剛 (大阪市立大学大学院), 大田武志 (大阪市立大学 COE 研究員) との共同研究 [HOY1][HOY2] を中心にまとめたものである.

2. Kerr-NUT-de Sitter 計量

Schwarzschild 計量から話しを始めよう. この解は最初に発見された Ricci 平坦な 4 次元ブラックホール解である. 極座標 $(t, r, \theta, \phi) \in R^4$ を使って, 計量テンソルは

$$g = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \tag{2}$$

と与えられる. ここで $f = 1 - (2m/r)$ そして m はブラックホールの質量を表す. $r = 2m$ で $f = 0$ となり計量が発散していることがわかる. し

かしながら, この特異性は座標を取り替えることで解消できる. 特異性を解消し拡張された空間では $r = 2m$ がホライズンと呼ばれる特別な超曲面になる. この曲面は, 幾何学的には全測地的ヌル超曲面として定義されるものである.

現在知られている最も一般的なブラックホール解は, 2006 年 Chen-Lü-Pope によって発見された Kerr-NUT-de Sitter 計量である [CLP]. この計量は d 次元の Einstein 計量であり, ブラックホールの質量, 角運動量, 宇宙定数そして NUT 電荷に対応する d 個の定数 $\{c_k, b_\mu, c\}$ を含んでいる ((7),(8) 式参照). 質量を除くすべての定数を零におくと計量は d 次元 Schwarzschild 計量に帰着する. Jacobi 座標と呼ばれる座標 $(x_\mu, \psi_k) \in \mathbf{R}^d$ を使って計量の具体形を書くと次のようになる.

(a) $d = 2n$

$$g^{(2n)} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{dx_\mu^2}{Q_\mu(x)} + \sum_{\mu=1}^{n} Q_\mu(x) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k(\hat{x}_\mu) d\psi_k \right)^2 \tag{3}$$

(b) $d = 2n + 1$

$$\begin{aligned} g^{(2n+1)} &= \sum_{\mu=1}^{n} \frac{dx_\mu^2}{Q_\mu(x)} + \sum_{\mu=1}^{n} Q_\mu(x) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k(\hat{x}_\mu) d\psi_k \right)^2 \\ &+ \frac{c}{\sigma_n} \left(\sum_{k=0}^{n} \sigma_k d\psi_k \right)^2 \end{aligned} \tag{4}$$

計量に現れる関数を説明しよう. σ_k および $\sigma_k(\hat{x}_\mu)$ は次式で定義される $\{x_\nu^2\}$ の対称多項式である.

$$\begin{aligned} \prod_{\nu=1}^{n} (t - x_\nu^2) &= \sigma_0 t^n - \sigma_1 t^{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n \\ \prod_{\nu=1, \nu \neq \mu}^{n} (t - x_\nu^2) &= \sigma_0(\hat{x}_\mu) t^{n-1} - \sigma_1(\hat{x}_\mu) t^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1}(\hat{x}_\mu) \end{aligned} \tag{5}$$

関数 Q_μ は,

$$Q_\mu(x) = \frac{X_\mu}{U_\mu}, \quad U_\mu = \prod_{\nu=1, \nu \neq \mu}^{n} (x_\mu^2 - x_\nu^2) \tag{6}$$

と定義され, $X_\mu = X_\mu(x_\mu)$ は座標 x_μ だけに依存している. Einstein 条件を満足するには

(a) $d = 2n$

$$X_\mu = \sum_{k=0}^{n} c_k x_\mu^{2k} + b_\mu x_\mu, \tag{7}$$

(b) $d = 2n+1$

$$X_\mu = \sum_{k=0}^{n} c_k x_\mu^{2k} + b_\mu + \frac{(-1)^n c}{x_\mu^2}, \tag{8}$$

の形が要求される [HHOY].

3. コンフォーマル Killing-Yano テンソル場

橘俊一 [T], 柏田豊子 [K] によるコンフォーマル Killing-Yano テンソル場の定義を与えておこう.

定義 3.1. $h = (h_{c_1\cdots c_n})$ を d 次元 Riemann 多様体 (M, g) 上の n-微分形式とする. h が以下の方程式を満足するとき階数 n のコンフォーマル Killing-Yano テンソル場という.

$$\begin{aligned}\nabla_a h_{bc_1\cdots c_{n-1}} + \nabla_b h_{ac_1\cdots c_{n-1}} &= 2g_{ab}\xi_{c_1\cdots c_{n-1}} \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i (g_{ac_i}\xi_{bc_1\cdots\hat{c}_i\cdots c_{n-1}} + g_{bc_i}\xi_{ac_1\cdots\hat{c}_i\cdots c_{n-1}})\end{aligned} \tag{9}$$

ここで, 右辺にある $(n-1)$-微分形式 $\xi = (\xi_{c_1\cdots c_{n-1}})$ は

$$\xi_{c_1\cdots c_{n-1}} = \frac{1}{d-n+1}\nabla^a h_{ac_1\cdots c_{n-1}} \tag{10}$$

と定まる. また ∇ は計量 g に関する Levi-Civita 接続である.

以後, コンフォーマル Killing-Yano テンソル場を略して CKY テンソル場と書くことにする. U. Semmelmann による現代的な CKY テンソル場の定義は以下のように与えられる [S]. $O(d)$ 表現の分解を使って

$$T^*M \otimes \Lambda^n T^*M \cong \Lambda^{n-1}T^*M \oplus \Lambda^{n+1}T^*M \oplus \Lambda^{n,1}T^*M \tag{11}$$

が成立する. n-微分形式 h の共変微分 ∇h は $T^*M \otimes \Lambda^n T^*M$ の切断であり, 上記の分解を使って右辺の第 1 成分, 第 2 成分への射影は, それぞれ d^*h, dh となる. また, 第 3 成分への射影はツイスト演算子 $T : \Gamma(\Lambda^n T^*M) \to \Gamma(\Lambda^{n,1}T^*M)$ から

$$[Th](X) = \nabla_X h - \frac{1}{p+1}\imath_X dh + \frac{1}{n-p+1} X \wedge d^*h \tag{12}$$

によって与えられる． 以下の定義は定義 3.1. と同値なものである．
定義 3.2. n-微分形式 h は，第 3 成分への射影がゼロ，すなわち $Th=0$ のとき CKY テンソル場という．

4. Kerr-NUT-de Sitter 時空の一意性

我々の主要結果を定理の形で述べよう．

定理 4.1 [HOY1] [HOY2]． d 次元時空 (M,g) に以下の 3 条件を満足する階数 2 の CKY テンソル場 h が存在することを仮定する：

$$(a1)\ dh=0,\quad (a2)\ L_\xi g=0,\quad (a3)\ L_\xi h=0.$$

このとき，(M,g) は Kerr-NUT-de Sitter 時空だけである．

注意 階数 2 の CKY テンソル場 $h=(h_{ab})$ は，(9)(10) より

$$\nabla_a h_{bc}+\nabla_b h_{ac}=2g_{ab}\xi_c-g_{ac}\xi_b-g_{bc}\xi_a, \tag{13}$$

$$\xi_a=\frac{1}{d-1}\nabla^b h_{ba} \tag{14}$$

を満たす． (M,g) が Einstein であることを仮定すると立花の結果 [T] から，ベクトル場 $\xi=(\xi^a)$ は Killing ベクトル場となる．こうして条件 $(a2)$ は自動的に満たされる． ここでは Einstein 条件は課していないことに注意する．従って，Kerr-NUT-de Sitter 時空というとき，関数 $X_\mu=X_\mu(x_\mu)$ は (7)(8) のように特定されたものではなく座標 x_μ だけに依存する任意関数を意味する．

定理 4.1 の証明の前半部分は，Kerr-NUT-de Sitter 時空上の測地線が可積分であることを示すことである．この部分に関しては論文 [HOY1] で行われた． 概略は次の通りである． h を j 回外積して $(2j)$-微分形式 $h^{(j)}=h\wedge\cdots\wedge h$ を作る．条件 $(a1)$ より $h^{(j)}$ は明らかに閉微分形式である．さらに $h^{(j)}$ は CKY テンソル場になることも示される．閉 CKY テンソル場 $h^{(j)}$ に対し，Hodge のスター作用素 $*$ を用いて $f^{(j)}=*h^{(j)}$ を定義するとき $f^{(j)}=(f^{(j)}_{a_1\cdots a_{d-2j}})$ は

$$\nabla_{a_1}f^{(j)}_{a_2a_3\cdots a_{d-2j+1}}+\nabla_{a_2}f^{(j)}_{a_1a_3\cdots a_{d-2j+1}}=0 \tag{15}$$

を満たす． このようなテンソル場は Killing-Yano (KY) テンソル場と呼ばれる．そして KY テンソル場を "2 乗" し縮約することにより階数 2 の

対称な Killing テンソル場 $K^{(j)}=(K^{(j)}_{ab})$ を得る．これらのテンソル場は

$$\nabla_a K^{(j)}_{bc}+\nabla_b K^{(j)}_{ca}+\nabla_c K^{(j)}_{ab}=0 \tag{16}$$

に従う．さらに，ベクトル場 $\eta^{(j)}$ を $\eta^{(j)}_a=K^{(j)}_a{}^b\xi_b$ によって定義すると，条件 $(a2)(a3)$ から Killing ベクトル場であることがわかる．論文 [HOY1] で証明したことは KY テンソル場および Killing ベクトル場が Schouten 括弧の意味で互いに交換するということである．この結果を Benenti-Francaviglia の定理 [BF] と組み合わせると，測地線方程式が変数分離することを示すことができる．
証明の残りの部分は，変数分離条件から計量テンソルを絞り込むことである．適当な変数分離座標 (x_μ,ψ_k) を使うと，計量テンソルの逆行列は

$$g^{-1}=\begin{pmatrix} g^{\mu\mu} & 0\\ 0 & g^{ij}\end{pmatrix} \tag{17}$$

の形に書くことができる．変数分離条件から、その成分は

$$g^{\mu\mu}g^{\nu\nu}\partial_\mu\partial_\nu g^{\lambda\lambda}-g^{\mu\mu}\partial_\mu g^{\nu\nu}\partial_\nu g^{\lambda\lambda}-g^{\nu\nu}\partial_\nu g^{\mu\mu}\partial_\mu g^{\lambda\lambda}=0, \tag{18}$$

$$g^{\mu\mu}g^{\nu\nu}\partial_\mu\partial_\nu g^{ij}-g^{\mu\mu}\partial_\mu g^{\nu\nu}\partial_\nu g^{ij}-g^{\nu\nu}\partial_\nu g^{\mu\mu}\partial_\mu g^{ij}=0. \tag{19}$$

に従う．この方程式の一般解は Stäckel によって与えられた [ST1][ST2]:

$$g^{\mu\mu}=\bar{\phi}_{(1)}{}^{\mu}(x),\quad g^{ij}=\sum_{\mu=1}^{n}\zeta^{ij}_{\mu}(x^\mu)\bar{\phi}_{(1)}{}^{\mu}(x). \tag{20}$$

ここで，$\bar{\phi}=(\bar{\phi}_{(i)}{}^{\mu})$ は $n\times n$ Stäckel 行列 $\phi=(\phi_\mu{}^{(i)})$ の逆行列である．また Stäckel 行列とは，μ 行 i 列成分が x_μ だけに依存するような行列のことである．すなわち $\phi_\mu{}^{(i)}=\phi_\mu{}^{(i)}(x_\mu)$． 関数 ζ^{ij}_μ は x_μ だけに依存し，変数分離条件だけではその形は定まらない．

Killing テンソル場 $K^{(i)}$ は

$$K^{(i)\mu\mu}=\bar{\phi}_{(i)}{}^{\mu}(x),\quad K^{(i)jk}=\sum_{\mu=1}^{n}\zeta^{jk}_{\mu}(x^\mu)\bar{\phi}_{(i)}{}^{\mu}(x) \tag{21}$$

と与えられる [BF]．今の場合，$K^{(i)}$ は CKY テンソル場から構成されており，線形作用素として漸化式

$$K^{(i)}=A^{(i)}I-QK^{(i-1)} \tag{22}$$

を満足する．ここで I は恒等写像，係数 $A^{(i)}, Q$ は CKY テンソル場を使って決定できる [HOY1]．CKY 方程式 (13) と漸化式から最終的に

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_{(1)}{}^{\mu}(x) &= \frac{X_\mu(x_\mu)}{U_\mu}, \quad U_\mu = \prod_{\nu=1,\nu\neq\mu}^{n}(x_\mu^2 - x_\nu^2) \\ \zeta_\mu^{ij}(x_\mu) &= \frac{(-1)^{i+j}x_\mu^{2(2n-2-2\epsilon-i-j)}}{X_\mu^2} + \frac{(-1)^{n+1}\epsilon}{cx_\mu^2 X_\mu}\delta^{in}\delta^{jn}\end{aligned}$$

を得る．この形を計量成分 (20) に代入し，Kerr-NUT-de Sitter 時空 (3)($\epsilon = 0$) および (4)($\epsilon = 1$) が再現される．

5. Sasaki-Einstein 多様体とゲージ理論/重力理論対応

超弦理論は量子重力を含む統一理論の候補として素粒子物理学において注目されている．この理論は無限個の "素粒子" を含む場の理論であるが，低エネルギーでは質量の重い素粒子を無視することにより超重力理論を使って近似できることが知られている．ここでは，閉じた弦の理論を記述する 10 次元 IIB 型超重力理論のブレーン解について述べることから始めよう．D3 ブレーンと呼ばれる空間 3 次元に広がったソリトン解を見てみよう．超重力理論の運動方程式は一般化された Einstein-Maxwell 方程式で与えられる．

$$R_{\mu\nu}^{(10)} = \kappa F_{\mu\alpha\beta\gamma\delta}F_\nu{}^{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad d * F = 0 \tag{23}$$

ここで，$R_{\mu\nu}^{(10)}$ は 10 次元 Lorentzian 計量 $g^{(10)}$ の Ricci 曲率を，F は 5 形式の場の強さを表し拘束条件から自己双対となることが要求される．10 次元空間は，ブレーンに平行な 4 次元 Minkowski 空間 $(\mathbf{R}^{1,3}, h)$ と，垂直な 6 次元 Riemannian 空間 $(X,\ \bar{g})$ の積 (warped product) で与えられると仮定する．そこでの計量を

$$g^{(10)} = f^{-1/2}h + f^{1/2}\bar{g}, \quad f \in C^\infty(X) \tag{24}$$

と書く．また 5 形式 F は

$$F = (1 + *)vol(\mathbf{R}^{1,3}) \wedge df^{-1} \tag{25}$$

の形を仮定する．これはブレーンをその源とする自己双対な "電磁場" であると解釈される．このとき，Einstein-Maxwell 方程式は X 上の方程式

$$Ric(\bar{g}) = 0, \quad \triangle_{\bar{g}} f = 0 \tag{26}$$

に帰着する．特に，X を Calabi-Yau cone $(C(M), \bar{g}) = (\mathbf{R}_+ \times M, dr^2 + r^2 g)$，調和関数を

$$f(r) = 1 + (a/r)^4 \tag{27}$$

に選ぶとき，この解は超対称性を持ち D3 ブレーンと呼ばれる．

定義 5.1. Riemannian 多様体 (M, g) は，cone $(C(M), \bar{g}) = (\mathbf{R}_+ \times M, dr^2 + r^2 g)$ が Calabi-Yau (Ricci-flat Kähler) のとき Sasaki-Einstein 多様体という．

$C(M)$ の頂点 $r = 0$ は特異点である．しかしながら，10 次元 Lorentzian 空間の中では，特異点は解消されホライズンになる．実際，ホライズン近傍では $f \sim (a/r)^4$ と近似でき，10 次元計量 $g^{(10)}$ は 5 次元 Anti-de Sitter 空間 AdS_5 と Sasaki-Einstein 多様体 M 上の直積計量に移行する．

$$\begin{aligned} g^{(10)} &\rightarrow g_{AdS} + a^2 g \\ g_{AdS} &= (r/a)^2 h + (a/r)^2 dr^2 \end{aligned} \tag{28}$$

Maldacena の予想は次のようなものである．直積空間 $AdS_5 \times M$ を背景とする超弦理論は共形不変性を持つ 4 次元超対称ゲージ理論と等価である．この対応は AdS/CFT 対応と呼ばれる．そして今日ではこの対応は共形不変性を持たない場の理論にまで拡張され，ゲージ理論/重力理論対応とも呼ばれている．ここでは，最も基本的な両者の間にある対称性の対応を見ておこう．AdS_5 の持つ対称性は等長変換 SO(2,4) である．この群は場の理論のヒルベルト空間に共形変換として作用する．また，Sasaki-Einstein 多様体上には $C(M)$ の Euler ベクトル $r\partial/\partial r$ から複素構造 J を使って誘導されるノルム 1 の Killing ベクトル場（Reeb ベクトル場）$\xi = J(r\,\partial/\partial r)$ が存在する．このベクトル場の生成する U(1) 等長変換は超対称ゲージ理論の U(1) R 対称性を表す．さらに，解 (28) 式の持つ超対称性の数をカウントすると，$AdS_5 \times M$ 上の Killing スピノールの数に等しいことがわかり，$4 \times 2 = 8$ となる．これは 4 次元超共形代数 SU(2,2|1) のフェルミオニック次元と一致する．

6. Kerr-NUT-de Sitter 計量から Sasaki-Einstein 計量

この章では，奇数次元の Kerr-NUT-de Sitter 計量から誘導される Sasaki-Einstein 計量について述べていこう．

(4) 式において $x_\mu = 1 + \epsilon y_\mu$ とおき，ϵ に関して展開し最後に極限 $\epsilon \rightarrow 0$ を

取る．この操作は物理的にはブラックホールの BPS 極限として理解できるものである [CGLP]. Einstein 条件を要求すると次のような計量が得られる．

$$
\begin{aligned}
g^{(2n+1)} &= (d\tau + A)^2 + g^{(2n)} \\
A &= -2\sum_{r=1}^{n} \sigma_r d\phi_r
\end{aligned}
\tag{29}
$$

計量 $g^{(2n)}$ は, Apostolov-Calderbank-Gauduchon[ACG] によって導入された orthotoric と呼ばれるクラスに属する 2-微分形式 $(1/2)dA$ を Kähler 形式とする Kähler-Einstein 計量である．その計量を具体的に書くと

$$
g^{(2n)} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{dy_\mu^2}{R_\mu(y)} + \sum_{\mu=1}^{n} R_\mu(y) \left(\sum_{r=1}^{n} \sigma_{r-1}(\hat{y}_\mu) d\phi_r \right)^2 . \tag{30}
$$

偶数次元 Kerr-NUT-de Sitter 計量とかなり似た形をしているが対称多項式 σ_r, $\sigma_r(\hat{y}_\mu)$ の変数の次数が 2 次から 1 次に減少している点が異なる:

$$
\begin{aligned}
\prod_{\nu=1}^{n} (t - y_\nu) &= \sigma_0 t^n - \sigma_1 t^{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n \\
\prod_{\nu=1, \nu\neq\mu}^{n} (t - y_\nu) &= \sigma_0(\hat{y}_\mu) t^{n-1} - \sigma_1(\hat{y}_\mu) t^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1}(\hat{y}_\mu)
\end{aligned}
\tag{31}
$$

関数 R_μ は (6) 式と同様に

$$
R_\mu(y) = \frac{Y_\mu}{U_\mu}, \quad U_\mu = \prod_{\nu=1, \nu\neq\mu}^{n} (y_\mu - y_\nu) \tag{32}
$$

と定義される．また, Einstein 条件によって

$$
Y_\mu = -4y_\mu^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} c_k y_\mu^k + d_\mu \tag{33}
$$

と与えられる．Cone 計量 $\bar{g} = dr^2 + r^2 g^{(2n+1)}$ は, Kähler 形式

$$
\omega = (1/2) d(r^2(d\tau + A)) \tag{34}
$$

を持つ Ricci-flat 計量であることが直接の計算から確認できる．従って, 定義 5.1. より $g^{(2n+1)}$ は Sasaki-Einstein 計量になっている．

次に，こうして得られた局所的な計量が大域的な計量に拡張されるのはどのような場合かが問題となる．具体的には，座標 $\{y_\mu, \phi_r\}$ の領域，それから関数 Y_μ に含まれる定数 $\{c_k, d_\mu\}$ の値を明らかにする必要がある．私の知る限り一般奇数次元での完全な解答は現在知られていない．5 次元の場合には Cvetic-Lü-Page-Pope によって次の結果が得られた．

定理 6.1 [CLPP1, 2] $S^2 \times S^3$ 上に，5 次元 Kerr-NUT-de Sitter 計量から誘導される 3 つの正整数 $\{a, b, c\}$ でラベルされた加算無限個のトーリック Sasaki-Einstein 計量 L^{abc} が存在する．

計量の具体形は (29) 式を 5 次元に制限することで得られる．また，計量には整数 a, b, c は陽に現れていないが，大域的な拡張を許すためにはホライズンを生成する Killing ベクトル場に対してある種の整数条件が必要となる．この条件から定数 $\{c_k, d_\mu\}$ が 3 つの整数 a, b, c で "量子化" されるのである．計量 L^{abc} は，2 つの正整数 $\{p, q\}$ でラベルされた $S^2 \times S^3$ 上の Sasaki-Einstein 計量 Y^{pq} を拡張したものになっている (Appendix 参照)．さらに，トーリックであることを要求すると，L^{abc} は $S^2 \times S^3$ 上の Sasaki-Einstein 計量の最も一般的な計量であることが知られている [CFO][BG]．最近，トーリック Sasaki-Einstein 計量の存在に関して注目すべき以下の定理が証明された．

定理 6.2 [FOW][CFO]． $S^2 \times S^3$ の任意の連結和に加算無限個のトーリック Sasaki-Einstein 計量が存在する．

5 次元 Sasaki-Einstein 多様体上のラプラシアンのスペクトラムを解析することは，ゲージ/重力対応の 1 つの検証を与える．この章の最後に，Y^{pq} をモデルにして，ゲージ理論サイドで得られている結果をラプラシアンのスペクトラムから再現することを試みる．下のテーブルは，Y^{pq} クイバー・ゲージ理論の bifundamental 表現に属する物質場 $\{Y, Z, U^\alpha, V^\alpha\}$ $(\alpha = 1, 2)$ に対し，スピン J，R 電荷 Q_R そして $U(1)$ フレーバー電荷をまとめたものである．このようなゲージ理論がどのように構成されたのかはここでは追及しない．興味のある方は論文 [BFHMS] を参照してほしい．

Field	J	Q_R	$U(1)$
Y	0	$(-4p^2+3q^2+2pq+(2p-q)\sqrt{4p^2-3q^2})/3q^2$	-1
Z	0	$(-4p^2+3q^2-2pq+(2p+q)\sqrt{4p^2-3q^2})/3q^2$	$+1$
U^α	1/2	$(4p^2-2p\sqrt{4p^2-3q^2})/3q^2$	0
V^α	1/2	$(3q^2-2pq+q\sqrt{4p^2-3q^2})/3q^2$	$+1$

ヒルベルト空間の状態（あるいは演算子）は，スケール次元 D と R 電荷 Q_R でラベルされる．D と Q_R には超共形代数からユニタリー性の制限 $D \geq (3/2)Q_R$ がつく．特に等号が成立している場合には表現は short multiplet を作る．この表現に属する演算子は chiral primary と呼ばれる．下のテーブルは物質場の積のトレースから作られる chiral primary 演算子 (Meson 演算子) をまとめたものである．

Meson	J	Q_R	$U(1)$
$\mathcal{S}$	$+1$	$+2$	0
$\mathcal{L}_+$	$(p+q)/2$	$p+q-1/(3\ell)$	$+p$
$\mathcal{L}_-$	$(p-q)/2$	$p-q+1/(3\ell)$	$-p$

Y^{pq} のラプラシアン Δ_g の局所表示は計量 (38) 式を使って与えられる．固有値 E を持つ固有関数 $\Psi=\Psi(x,\theta,\phi_r)$ は変数分離でき

$$\Psi = \exp\left(\sqrt{-1}\sum_{r=1}^{3} N_r\phi_r\right) F(x)G(\theta), \quad (\phi_r)=(\alpha,\psi,\phi) \tag{35}$$

と書ける．こうして方程式 $\Delta_g\Psi = E\Psi$ は F と G に関して 2 階フックス型の常微分方程式に帰着する．G は Jacobi 多項式を使って容易に解くことができる．他方 F の方程式は 4 つの確定特異点を持つ Heun 方程式と呼ばれるものになる（この方程式を顕に解くことは難しい）．

命題 6.1 [KSY]. $E=D(D+4)$ はラプラシアン Δ_g の固有値である．ここで $D=(3/2)Q_R$，Q_R は Meson$\{\mathcal{S},\mathcal{L}_+,\mathcal{L}_-\}$ の R 電荷とする．

この結果の意味を理解するために少し実験しよう．

♣ Meson $\mathcal{S}$ に対してテーブルから $D=(3/2)\times 2=3$ となる．これは $N=(1,0,0)$ と (41) 式の Reeb ベクトル ξ の内積に一致する．

♣ Meson $\mathcal{L}_+$ に対し $D=(3/2)(p+q-1/(3\ell))$．これは $N=(n,n-p,1)$ $(n=0,1,2,\ldots,p+q)$ と ξ の内積に一致する．n の走る数はスピン $J=(p+q)/2$ の重複度に等しい．

♣ Meson $\mathcal{L}_-$ に対し $D = (3/2)(p - q + 1/(3\ell))$. これは
$N = (n, n, -1)$ $(n = 0, 2, \ldots, p - q)$ と ξ の内積に一致する. n の走る数はスピン $J = (p - q)/2$ の重複度に等しい.

上記ベクトル N は, Appendix に与えた polyhedral cone C の中にある整数点になっている. 命題 6.1 は少し一般化できて

$$D = \{(\xi, N) \mid N \in \mathbf{Z}^3 \cap C\} \tag{36}$$

としてよい. ところで, C の中の整数点は $C(Y^{p,q})$ 上の正則関数に対応する. この事実より, Meson の固有関数 Ψ は $C(Y^{p,q})$ の正則関数に拡張されるはずである. 実際 cone の動径座標を r とするとき, $\tilde{\Psi} = r^D \Psi$ は正則な調和関数になる. この動径座標依存性はゲージ/重力対応からも自然に思われる. r のスケーリングは AdS_5 の等長変換 SO(1,1) $\subset$ SO(2,4) を誘導し, ゲージ理論サイドでは共形場理論のスケール次元 D を与える.

Dirac 演算子に関しても同様な公式を得ることができる.

命題 6.2 [OY2]. $E = \pm(\tilde{D} + 1)$ は Dirac 演算子の固有値である. ここで $\tilde{D} = \{(\xi, \tilde{N} \mid \tilde{N} \in (\mathbf{Z}^3 \cup \mathbf{Z}^3_{1/2}) \cap \tilde{C}\}$ とする. また, ξ は Reeb ベクトル, $\tilde{C}$ は polyhedral cone C を少し変形した $\tilde{C} = \{y \in \mathbf{R}^3 \mid (v^a, y) \geq 1/2\}$ である.

命題 6.1 および 6.2 の表式は Y^{pq} に限定されたものではない. トーリック Sasaki-Einstein 多様体 L^{abc} に対しても成立する [OY3].

7. APPENDIX Sasaki-Einstein 計量 Y^{pq}

5 次元 Sasaki-Einstein 計量に関して次の分類定理が知られている.

定理 7.1 [BFGK]. S を 5 次元単連結な regular Sasaki-Einstein 多様体とする. このとき S は, S^5, Stiefel 多様体 $V_{2,4}$ = SO(4)/SO(2) あるいは Kähler-Einstein 計量を持つ Del Pezzo 曲面上の S^1 束の全空間の内の 1 つである.

Quasi-regular な場合, Reeb ベクトル場は Sasaki-Einstein 多様体上に locally free な S^1 作用を生成する. このとき商空間は Kähler-Einstein オービフォールドになる. このクラスの計量は近年 Boyer-Galicki によって多くの例が構成された [BK]. Y^{pq} 計量は, regular でも quasi-regular でもな

い新しいタイプの Sasaki-Einstein 計量である [GMSW]. 計量は 2 つの正整数 $\{p,q\}$ で書かれた定数

$$a=\frac{1}{2}-\frac{(p^2-3q^2)\sqrt{4p^2-3q^2}}{4p^3} \tag{37}$$

を使って

$$\begin{aligned} g &= \frac{(1-x)}{6}(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)+\frac{1}{\omega(x)q(x)}dx^2 \\ &+ \frac{q(x)}{9}(d\psi-\cos\theta d\phi)^2+\omega(x)(d\alpha+f(x)(d\psi-\cos\theta d\phi))^2 \end{aligned} \tag{38}$$

と与えられる. ここで

$$\omega(x)=\frac{2(a-x^2)}{1-x},\quad q(x)=\frac{a-3x^2+2x^3}{a-x^2},\quad f(x)=\frac{a-2x+x^2}{6(a-x^2)} \tag{39}$$

である. この計量は $S^2\times S^3$ 上で大域的に定義されている. これを見るには, θ と ϕ の領域を $0\le\theta\le\pi$, $0\le\phi\le 2\pi$ とする. このとき (38) 式の第 1 項は標準的な S^2 計量を表す. また, 3 次関数 $a-3x^2+2x^3=0$ の 2 つの根を x_1, x_2 として, $x_1\le x\le x_2$, $0\le\psi\le 2\pi$ と選ぶとき, (θ,ϕ,x,ψ) によって定まる 4 次元空間 B は位相的に $S^2\times S^2$ となることが示される. さらに, α の周期を

$$0\le\alpha\le 2\pi\ell,\quad \ell^{-1}=(3q^2-2p^2+p\sqrt{4p^2-3q^2})/q \tag{40}$$

に取ると α が B 上の S^1 ファイバー座標になる. 正整数 p,q は $H^2(B,\mathbf{Z})$ の要素と見ることができる.

Calabi-Yau cone $C(Y^{pq})$ 上で T^3 作用を生成する $\partial/\partial\phi^i$ $(0\le\phi^i\le 2\pi)$ は, Killing ベクトル場 $\{\partial/\partial\phi,\partial/\partial\psi,\partial/\partial\alpha\}$ の線形結合によって与えられる. 特に Reeb ベクトル場はこの基底で書くと,

$$\xi=\left(3,-3,-\frac{3}{2}\left(p-q+\frac{1}{3\ell}\right)\right) \tag{41}$$

となり, 成分が無理数であることから Sasaki-Einstein 多様体は irregular であることがわかる. T^3 作用の運動量写像は $C(Y^{pq})$ を convex rational polyhedral cone $C\subset\mathbf{R}^3$ 上のトーラス・ファイブレーションとして実現する. 今の場合

$$C=\{y\in\mathbf{R}^3\mid(v^a,y)\ge 0\,;a=1\sim 4\}. \tag{42}$$

ここで ベクトル $v^a = (1, w^a) \in \mathbf{Z}^3 \subset \mathbf{R}^3$ は

$$w^1 = (-1, -p), \quad w^2 = (0,0), \quad w^3 = (-1,0), \quad w^4 = (-2, -p+q) \quad (43)$$

である.

参考文献

[ACG] V. Apostolov, D. Calderbank and P. Gauduchon, Hamiltonian 2-forms in Kähler geometry, I general theory, J. Diff. Geom. 73 (2006) 359-412, [math.DG/0202280].

[BF] S. Benenti and F. Francaviglia, Remarks on certain separability structures and their applications to general relativity, General Relativity and Gravitation, Vol.10, No.1 (1979)79-92.

[BFGK] H. Baum, T. Friedrich, R. Grunewald and I. Kath, Twistors and Killing Spinors on Riemannian Manifolds, Teubner-Texte für Mathematik, vol. 124, Teubner, Stuttgart, Leipzig, 1991.

[BG] C. P. Boyer and K. Galicki, Sasakian, Geometry, Holonomy and Supersymmetry, [arXiv:math.DG/070323].

[BFHMS] S. Benvenuti, S. Franco, A. Hannany, D. Martelli and J. Sparks, An infinite family of superconformal quiver gauge theories with Sasaki-Einstein duals, JHEP 0506(2005) 064, [arXiv:hep-th/0411264].

[CFO] K. Cho, A. Futaki and H. Ono, Uniqueness and examples of toric Sasaki-Einstein manifolds, [arXiv: math.DG/0701122].

[CGLP] M. Cvetic, G.W. Gibbons, H. Lü and C.N. Pope, Rotating Black Holes in Gauged Supergravities, [arXiv:hep-th/0504080].

[CLPP1] M. Cvetic, H. Lü, Don N. Page and C.N. Pope, New Einstein-Sasaki Spaces in Five and Higher Dimensions, Phys.Rev.Lett. 95 (2005)

071101, [arXiv:hep-th/0504225].

[CLPP2] M. Cvetic, H. Lü, Don N. Page and C.N. Pope, New Einstein-Sasaki and Einstein Spaces from Kerr-de Sitter, [arXiv:hep-th/0505223].

[CLP] W. Chen, H. Lü and C.N. Pope, General Kerr-NUT-AdS Metrics in All Dimensions, Class. Quant. Grav. 23 (2006) 5323-5340, [arXiv:hep-th/0604125].

[FOW] A. Futaki, H. Ono and G. Wang, Transverse Kähler geometry of Sasaki manifolds and toric Sasaki-Einstein manifolds, [arXiv:math.DG/0607586].

[GMSW] J.P. Gauntlett, D. Martelli, J. Sparks and D. Waldram, Sasaki-Einstein metrics on $S^2 \times S^3$, Adv. Theor. Math. Phys. 8 (2004) 711-734, [arXiv:hep-th/0403002].

[HHOY] N. Hamamoto, T. Houri, T. Oota and Y. Yasui, Kerr-NUT-de Sitter curvature in all dimensions, J. Phys. A40 (2007) F177-F184, [arXiv:hep/th0611285].

[HOY1] T. Houri, T. Oota and Y. Yasui, Closed conformal Killing-Yano tensor and geodesic integrability, [arXiv:hep-th/0707.4039].

[HOY2] T. Houri, T. Oota and Y. Yasui, Closed conformal Killing-Yano tensor and Kerr-NUT-de Sitter spacetime uniqueness, Phys. Lett. B 656(2007) 214-216, [arXiv:hep-th/0708.1368].

[HSY1] Y. Hashimoto, M. Sakaguchi and Y. Yasui, New Infinite Series of Einstein Metrics on Sphere Bundles from AdS Black Holes, Commun. Math. Phys. 257 (2005) 273-285, [arXiv:hep-th/0402199].

[HSY2] Y. Hashimoto, M. Sakaguchi and Y. Yasui, Sasaki-Einstein Twist of Kerr-AdS Black Holes, Phys. Lett. B 600 (2004) 270-274, [arXiv:hep-th/0407114].

[K] T. Kashiwada, On Conformal Killing Teosor, Natural Science Report, Ochanomizu University, Vol.19, No2 (1968)67-74.

[KSY] H. Kihara, M. Sakaguchi and Y. Yasui, Scalar Laplacian on Sasaki-Einstein Manifolds Y^{pq}, Phys.Lett.B 621 (2005)288-294, [arXiv:hep-th/0505259].

[LP] H. Lü, C.N. Pope, Resolutions of Cones over Einstein-Sasaki Spaces, [arXiv:hep-th/0605222].

[OY1] T. Oota and Y. Yasui, Explicit Toric Metric on Resolved Calabi-Yau Cone, Phys. Lett. B 639 (2006) 54-56, [arXiv:hep-th/0605129].

[OY2] T. Oota and Y. Yasui, Separability of Dirac equation in higher dimensional Kerr-NUT-de Sitter spacetime, [arXiv: hep-th/0711.0078].

[OY3] T. Oota and Y. Yasui, Toric Sasaki-Einstein Manifolds and Heun Equation, Nucl. Phys. B 742 (2006) 275-294, [arXiv:hep-th/0512124].

[S] U. Semmelmann, Conformal Killing forms on Riemannian manifolds, [arXiv:math.DG/0206117].

[ST1] P. Stäckel, Über die Bewegung eines Punktes in einer n-fachen Mannigfaltigkeit, Math. Ann. 42 (1893)537-563.

[ST2] P. Stäckel, Über quadatizche Integrale der Differentialgleichungen der Dynamik, Ann. Math. Pura Apple. 26 (1897)55-60.

[T] S. Tachibana, On conformal Killing tensor in a Riemannian space, Tohoku Math. Journ. 21 (1969) 56-64.